Μάθημα 21ο
Πιθανότητες -

20/12/2016

Αλλαγή Μεταβλητών

Πρόβλημα: τ.μ. X γνωστή κατανομή

Ζητούμε την κατανομή $Y = g(X)$

(I) Διακριτή τ.μ. → Μέθοδος της σπ.

(II) Συνεχής τ.μ.

(IIa) Μέθοδος της α.σ.κ.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = \int_{\{x : g(x) \leq y\}} f_X(x)\, dx$$

$$f_X(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

Παράδειγμα.

Έστω $X \sim U$ κατανομή

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ x & , 0 < x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

Να βρεθεί η κατανομή $Y = X^n$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

Αν $W \sim U(a,b)$

$$\Downarrow$$

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & , w \leq a \\ \frac{w-a}{b-a} & , a < w < b \\ 1 & , w \geq b \end{cases}$$

Συγκρίνοντας την F_X με F_W γράφουμε $X \sim U(0,1)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

<u>Τιμές της τ.μ. Y</u>

Τιμές $x \in (0,1)$
Επίσης $y = x^n$ } $\Rightarrow$ Τιμές $y \in (0,1)$

$F_Y(y) \overset{\text{ορ.}}{=} P(Y \leq y) = P(X^n \leq y) = P(X \leq y^{1/n}) \overset{\text{ορ}}{=} F_X(y^{1/n}) =$
$\forall y \in \mathbb{R}$
$= y^{1/n}, \quad 0 < y < 1$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy}(y^{1/n}) = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}}, \quad 0 < y < 1.$$

<u>Τελικά:</u>
$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} & , 0 < y < 1 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

Η f_Y είναι σ.π.π. αφού:
$f_Y(y) \geq 0$
και $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, dy = 1$. (αποδεικνύεται εύκολα)

Παραδείγματα

ⓐ Αν η τ.μ. X είναι συνεχής με τιμές στο $\mathbb{R}$ και σ.π.π. $f_X(x)$ να βρεθεί η σ.π.π. της τ.μ. $Y = X^2$

ⓑ Αν $X \sim N(0,1)$ είναι η κατανομή της $Y = X^2$?

ⓐ Τιμές της Y

Τιμές X : $x \in \mathbb{R}$

$$y = x^2$$

Τιμές Y : $y \in (0, \infty)$

$$F_Y(y) \overset{\text{ορ.}}{=} P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{y}) =$$
$$= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

Η σ.ε.κ της Y είναι:

$$F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \quad , y \in \mathbb{R}$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(\sqrt{y}) - \frac{d}{dy} F_X(-\sqrt{y}) =$$

$$= (\sqrt{y})' F_X'(\sqrt{y}) - (-\sqrt{y})' \cdot F_X'(-\sqrt{y}) =$$

$$= \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}-1} f_X(\sqrt{y}) - \left(-\frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}-1}\right) f_X(-\sqrt{y}) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}) \right)$$

Άρα: $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}) \right), y \in (0, \infty)$

(β) Αφού $X \sim N(0,1)$ η $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} \cdot e^{-y/2}, \quad y \in (0,\infty)$$

<u>Υπενθύμιση:</u> $W \sim G(a,\beta)$
$$f_W(w) = \frac{1}{\beta^a \Gamma(a)} w^{a-1} e^{-x/\beta}, x \geq 0$$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$Y \sim G\left(\frac{1}{2}, 2\right) \equiv \chi^2_1$

<u>Παράδειγμα</u>

(α) Αν η τ.μ. X είναι συνεχής με τιμές στο $\mathbb{R}$ και σ.π.π. $f_X(x)$ να βρεθεί η σ.π.π. της τ.μ. $Y = |X|$

(β) Αν $X \sim U(-1,1)$ είναι η κατανομή της $Y = |X|$?

Τιμές Y :
Τιμές X : $x \in \mathbb{R}$
$y = |x|$
$\Rightarrow$ <u>Τιμές Y</u> : $y \in (0, +\infty)$

$F_Y(y) \stackrel{\text{ορ.}}{=} P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) =$
$= F_X(y) - F_X(-y)$

$F_Y(y) = F_X(y) - F_X(-y), \quad y \in \mathbb{R}$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(y) - \frac{d}{dy} F_X(-y) =$$

$$= f_X(y) - f_X(-y)\,(-y)'$$

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y) \quad , y \in (0, \infty)$$

$Y \sim U(0,1)$

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω η συνεχής τ.μ. X με ασκ $F_X(x)$.
Ν.δ.ο. η τ.μ. $Y = F_X(x) \sim U(0,1)$

<u>Τιμές Y</u>:

Τιμές της X : $x \in \mathbb{R}$
επίσης : $y = F_X(x)$
Η $F_X \in (0,1)$

$\Bigg\}$ Τιμές της Y : $y \in (0,1)$

$$F_Y(y) \overset{\text{ορ.}}{=} P(Y \leq y) = P(F_X(x) \leq y) \xrightarrow[\exists\, \eta\, F_X^{-1}]{\text{Η } F_X \text{ αύξουσα}}$$

$$P\left(F_X^{-1}(F_X(x)) \leq F_X^{-1}(y)\right) = P(X \leq F_X^{-1}(y)) \overset{\text{ορ.}}{=}$$
$$= F_X(F_X^{-1}(y)) = y$$

<u>Άρα</u>: $F_Y(y) = y$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = 1 \quad , y \in (0,1)$$

$$W \sim U(a,b) \rightarrow f_W(w) = \frac{1}{b-a} \quad , a < w < b$$

$\Bigg\}$ $Y = F_X(x) \sim U(0,1)$

II β) Μέθοδος Μετασχηματισμού

Πρόταση: Έστω συνεχής τ.μ. X με σ.π.π. f_X και σύνολο δυνατών τιμών το $I \subseteq \mathbb{R}$.

Παίρνουμε το μετασχηματισμό $y = g(x)$ και υποθέτουμε ότι:

(i) Ο $y = g(x)$ είναι 1-1 μετασχηματισμός του I στο $g(I) = \{ y : y = g(x), x \in I \}$

(ii) Η $\frac{d}{dy} g^{-1}(y)$ είναι συνεχής και $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) \neq 0$, $y \in g(I)$

τότε:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \quad y \in g(I)$$

Παράδειγμα

Έστω συνεχής τ.μ. $X \sim Beta(a, b)$

Να βρεθεί η κατανομή $Y = -\log X$ $(\log = \ln)$

Δε μπορώ να εφαρμόσω μέθοδο α.σ.κ. γιατί η α.σ.κ. της $Beta(a,b)$ δεν είναι διαθέσιμη σε κλειστή μορφή.

Αφού $X \sim Beta(a,b)$, $f_X(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $\quad 0 < x < 1$

Τιμές X: $x \in (0,1) \equiv I$.

Θεωρώ το μετασχηματισμό $y = g(x) = -\log X$

$$\text{Τιμές της } Y \left\langle \begin{array}{l} x \in (0,1) \in I \\ y = -\log x \end{array} \right\}$$

Τιμές Y: $y \in (0, \infty) = g(I)$

(i) Η $g = -\log$ στην 1-1 γιατί η log είναι ↑ και -log ↓

Εύρεση g^{-1}: Αρκεί να λύσω ως προς x:

$y = g(x) = -\log x$

$\log x = -y \Rightarrow x = g^{-1}(y) = e^{-y}$, $y \in g(I) = (0,\infty)$

(ii) $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = -e^{-y}$, $y \in (0,\infty)$ ← συνεχής
$\neq 0$, $\forall y \in (0,\infty)$

Άρα: $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| =$

$= f_X(e^{-y}) \, |-e^{-y}| = \frac{1}{B(a,\beta)} e^{-ay} (1-e^{-y})^{\beta-1}$, $y \in (0,\infty)$

Παρατηρούμε ότι για $\beta = 1$: $f_Y(y) = a \cdot e^{-ay}$, $y > 0$
δηλ. η εκθετική κατανομή με παράμετρο a.

Παράδειγμα

Έστω συνεχής τμ. X με κατανομή Pareto με σππ. $f_X(x) = \theta x^{-\theta-1}$
Να βρεθεί κατανομή $Y = \log X$. $x > 1$, $\theta > 0$

Τιμές X: $x > 1$. Άρα $x \in (1,\infty) = I$.
Τιμές Y: x, $y = \log x$ > $y \in (0,\infty) = g(I)$

Θεωρώ το μετασχηματισμό $y = g(x) = \log x$, $x > 1$

(i) Η g είναι 1-1 γιατί είναι ↑.
Αρκεί να βρω την g^{-1} λύνοντας ως προς x.
$y = g(x) = \log x \Rightarrow x = e^y = g^{-1}(y)$

(ii) $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = e^y$ συνεχής
$\neq 0$, $\forall y \in (0, \infty)$

$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| =$
$= f_X(e^y) |e^y| = \theta (e^y)^{-\theta-1} e^y = \theta \cdot e^{-\theta y} e^{-y} e^y \Rightarrow$
$\Rightarrow f_Y(y) = \theta \cdot e^{-\theta y}$, $y \in (0, \infty)$
$Y \sim Εκθ(\theta)$